# השיטה הרגולרית

## גרף ϵ-regular

יהי גרף דו-צדדי , נסמן את צפיפות הצלעות של G כך: .

יהי ו- נסמן את צפיפות הצלעות של כך: .

### הגדרת

נאמר שגרף דו-צדדי הוא  *אם* מתקיים אחד מהתנאים השקולים:

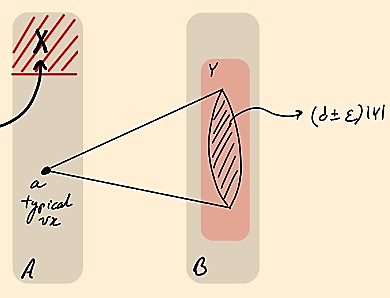
1. *לכל* ו- *כאשר ו- מתקיים: .*
2. *לכל* ו- *כאשר ו- מתקיים: .*
3. *לכל* ו- *מתקיים: .*

*האינטואיציה מאחורי הגדרה זו היא שאם היינו דוגמים גרף דו-צדדי אקראי G עם הסתברות לכל צלע , אזי לכל* ו- מתקיים: *. ניתן להסתכל על מרווח הטעות כאל . במילים אחרות, לעניין מספר הצלעות, גרפים שהם מתחקים אחר התנהגותם של גרפים אקראיים. נראה מספר דוגמאות נוספות להתחקות זו.*

***הגדרה נוספת****:* נאמר שגרף דו-צדדי הוא  *אם לכל* ו- *מתקיים: . נשים לב כי הם .*

## דרגות בגרף

***משפט****: לכל קיים כך שבגרף אקראי באופן אסימפטוטי כמעט ודאי הדרגה של כל צומת ב-G שווה , כאשר . כלומר התוחלת של כל דרגה היא עם מרווח לטעות. נראה משפט דומה בגרף .*

****משפט**: *יהי* גרף דו-צדדי שהוא  *עם צפיפות צלעות . יהי כך ש-. אזי מספר השכנים ב- של כל צומת ב- הוא , מלבד לכל היותר צמתים ב-. כלומר כמעט כל הצמתים ב-A יש דרגה ב-Y שקרובה לתוחלת, זוהי התנהגות שמתאימה לגרף אקראי.*

**הוכחה**:*נספור את הצמתים ב-A שדרגתם קטנה מ-. נסמן . לפי הגדרת , אם נניח , אזי מתקיים . אולם דרגת כל צומת מ-X ל-Y קטנה מ-, ולכן . סתירה! לכן לא ניתן להניח . באותו אופן נספור את הצמתים ב-A שדרגתם ב-Y גדולה מ- ונקבל שאינם יכולים להיות יותר מ- . לכן מספר הצמתים ב-A שאינם מקיימים את התנאי במשפט הוא לכל היותר .*

**משפט**: *יהי* גרף דו"צ  *עם צפיפות צלעות . יהי כך ש-. אזי מספר השכנים המשותפים ב- של כל זוג צמתים ב- הוא , מלבד לכל היותר זוגות צמתים ב-. כלומר כמעט כל זוג צמתים ב-A יש דרגה משותפת ב-Y שקרובה לתוחלת, גם כאן זוהי התנהגות שמתאימה לגרף אקראי.*

**הוכחה**: *נספור את הצמתים ב-A שדרגתם קטנה מ-. נסמן . כיוון ש- אזי גם שהרי הוא שבר. לכן מהוכחת משפט קודם . סכום זהה יש עבור כל הצמתים ב-A שדרגתם גדולה מ-.*

כעת, עבור כל צומת  *נספור כמה צמתים יש ב- שביחד הם זוג שדרגם המשותפת קטנה מהמתואר במשפט. נגדיר . נשים לב כי מהגדרת מתקיים . נוכל להסתכל על כאל ואל כאל ממשפט קודם ולהסיק . סכום זהה יש לכל הצמתים ב-A שביחד עם דרגם המשותפת גדולה מהמתואר במשפט.*

*בשלב זה נוכל לספור את כל זוגות הצמתים הרעות. נניח לחומרה כי עבור כל צומת ב-X כל שאר הצמתים ב-A רעות.*

## The Slicing Lemma

***משפט****: יהי* גרף דו-צדדי שהוא  *עם צפיפות צלעות .* יהי ויהי ו- *כאשר ו-*. אזי הגרף המושרה הוא גרף כאשר .

משפט זה מראה שאם לוקחים חלקים מספיק גדולים מגרף אזי מקבלים גרף שגם הוא במובן מסוים. גם תכונה זו היא תכונה שהיינו מצפים לה בגרפים אקראיים.

**הוכחה**: יהי ו- *כאשר ו-*. נוכיח כי .

נשים לב כי *. באותו אופן . לפי הגדרת מתקיים וגם . כעת נוכל לחשב:*

המעבר הראשון נובע מהוספת והחסרת d, המעבר השני מפיצול הערך מוחלט, המעבר השלישי מהגדרת .

## שידוך בגרף

**משפט**: יהי ו-, כלומר . ויהי גרף דו-צדדי שהוא  *עם צפיפות צלעות המקיים והדרגה המינימלית בגרף היא .* אזי ב-G יש שידוך מושלם.

**הוכחה**: נוכיח שתנאי Hall מתקיים, . יהי *. נחלק לשלושה מקרים:*

1. *כאשר*  *אזי .*
2. *כאשר אזי . לכל מתקיים . ומכאן . כלומר לכל צומת ב-B יש שכן ב-S. לכן .*
3. *כאשר . מהנחה מתקיים . נשים לב כי . בנוסף . נניח בשלילה כי . אזי:*

*נמצא אם כן כי ו- אך בסתירה להגדרת של G.*

חלוקה  *תקרא אם מתקיים:*

* *.*  *נקרא* *ה*-exceptional set.
* *כל הזוגות כאשר הם מלבד לכל היותר .*

### Szemeredis regularity lemma

**משפט**: לכל ולכל קיימים כך שלכל בכל גרף עם n צמתים יש כך ש-.

משפט זה בעצם אומר שניתן לחלק את הצמתים של כל גרף הגדול מספיק למספר מוגבל של חלקים כך שהצלעות בין חלקים שונים יתנהגו כמעט באופן אקראי.

חשוב מאוד להגביל את k, מפני שאם לא נגביל אותו מלמטה אזי נוכל להגדיר את כל הגרף כ-, ואם לא נגביל אותו מלמעלה נוכל להגדיר כל צומת כחלק נפרד. בשני המקרים אלו למשפט אין בעצם משמעות. בנוסף, המשפט רלוונטי רק בגרף צפופים שיש בהם הרבה צלעות, מפני שאם יש מעט צלעות בגרף, כלומר , אז כולם יכולים להיות ב- ואז שוב למשפט אין משמעות. מכאן נוכל להגיע למסקנה כי אינה בעלת משמעות אלא אם כן צפיפות הצלעות גדולה מאוד מ-, .

## The counting lemma

### הגדרת reduce graph:

יהי ויהי  *קבוע ממשי. אזי נגדיר גרף עזר הנקרא* reduce graph, *בסימון , כאשר צמתיו הם קבוצות החלוקה מלבד וצלעותיו הם בין כל הקבוצות שיש להם צפיפות צלעות יותר מ-d והם .*

### Counting lemma

**משפט**: לכל גרף H ולכל קיימים כך שלכל ולכל , אם G גרף עם חלוקה שהיא כך ש- לכל , אזי מתקיים:

1. Embedding – *אם אזי .*
2. Counting – *אם וגם הם הצמתים של* H *ב- אזי* G *מכיל לפחות עותקים של* H*. כלומר מכיל המון עותקים.*

*זוהי הגרסה הפשוטה של המשפט. משפט זה הוא משמעותי מאוד, מפני שמאשר לנו לדעת גם אם יש עותק של H וגם חסם תחתון לכמה עותקים יש.*

***הוכחה חלק 1****: יהי . בשביל הפשטות נוכיח עבור . נניח כי . מטרתנו היא לשכן את בתוך קבוצת הצמתים לכל . נתחיל עם . לפי משפט מסעיף ב', עבור כל צומת , מתקיים: לכל , מלבד לכל היותר צמתים ב-. כל אחד מהצמתים "הטובים" ב- ניתן לשכן בה את . כעת, עבור כל נניח כי כבר שיכנו את כל הצמתים עד . נרצה לשכן את בצומת השייכת לקבוצת הצמתים ב- שהם שכנים משותפים של כל הצמתים שכבר שיכנו. לשם כך נגדיר לכל . אנו רוצים לבחור את מתוך .*

*משפט עזר: לכל . ניתן להוכיח באינדוקציה.*

*נדרוש שיתקיים , ואזי לכל . לכן, שוב לפי משפט מסעיף ב', עבור כל צומת , מתקיים: לכל , מלבד לכל היותר צמתים ב-. חלק מצמתים "רעים" אלו יכולים להיות ב-. נניח לחומרה שכולם ב-. לכן מספר הצמתים שנותר לנו לבחור מהם ב-:*

*נוכל לעשות זאת עבור כל . כך שלאחר שנמקם את נעדכן לכל .*

***הוכחה חלק 2****: נקבע את שיהיה מספיק קטן כך שיתקיים ו-. נניח כי כבר מיקמנו את כל הצמתים לתוך . נגדיר לכל .*

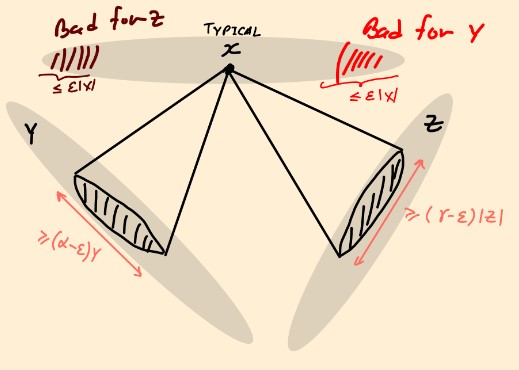
משפט עזר: ישנם לכל היותר צמתים לשכן את .

לפי משפט העזר מספר האפשרויות למקם את H בתוך G הוא לכל הפחות:

*כיוון שהגדרנו , אזי אכן מספר העותקים של H בתוך G הוא לכל הפחות .*

## Triangle counting lemma

**משפט**: יהי G גרף שניתן לחלק אותו לשלושה קבוצות זרות . נסמן צפיפות צלעות , , , כאשר . כל זוג מהקבוצות הם . נסמן את קבוצת כל המשולשים ב-G כך *. מתקיים:*

**

זהו חסם שאומר שמספר המשולשים בכל גרף העונה לדרישות המשפט, קרוב לתוחלת למספר משולשים בגרף אקראי דומה, שהיא .

**הוכחת חסם תחתון**: כיוון ש-X ו-Y הם גרף , לפי משפט בסעיף ב' מתקיים שדרגת כל ב-Y היא מלבד לכל היותר צמתים ב-X. באותו אופן דרגת כל ב-Z היא מלבד לכל היותר צמתים ב-X. כדי לחסום את מספר המשולשים, ניקח כל צומת "טובה" ב-X ונספור כמה צלעות יש בין השכנים של x ב-Y ובין השכנים של x ב-Z. כיוון ש-Y ו-Z הן , אזי:

*סך כל המשולשים:*

**הוכחת חסם עליון**: כיוון ש-X ו-Y הם גרף , לפי משפט בסעיף ב' מתקיים שדרגת כל ב-Y היא מלבד לכל היותר צמתים ב-X. באותו אופן דרגת כל ב-Z היא מלבד לכל היותר צמתים ב-X. כדי לחסום את מספר המשולשים מלמעלה, נניח לחומרה כי עבור כל צומת "רעה" ב-X יש משולשים (המקסימום האפשרי), ובנוסף ניקח כל צומת "טובה" ב-X ונספור כמה צלעות יש בין השכנים של x ב-Y ובין השכנים של x ב-Z. כיוון ש-Y ו-Z הן , אזי:

*סך כל המשולשים:*